



10.º ANO | ENSINO SECUNDÁRIO

# Matemática Aplicada às Ciências Sociais

## INTRODUÇÃO

---

Este documento curricular apresenta as Aprendizagens Essenciais de Matemática a que os alunos do Ensino Secundário, na disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais (MACS), devem ter acesso, em articulação com o Ensino Básico (EB) e enquadradas no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória. Foi elaborado por uma equipa pluridisciplinar, composta por especialistas em Matemática e em Didática da Matemática e por professores experientes nas diferentes vertentes curriculares do Ensino Secundário: Jaime Carvalho e Silva (Coordenador), Alexandra Rodrigues, António Domingos, Carlos Albuquerque, Cristina Cruchinho, Helder Martins, João Almiro, Luís Gabriel, Maria Eugénia Graça Martins, Maria Teresa Santos, Nélida Filipe, Paulo Correia, Rui Gonçalo Espadeiro e Susana Carreira.

### 1. Matemática Escolar Orientada para o Futuro

A formação de indivíduos matematicamente competentes é um propósito fundamental do currículo de matemática para o Ensino Secundário. A sociedade e o mundo contemporâneos, marcados pela globalização, crescente digitalização, conectividade e automatização, e por uma aceleração do desenvolvimento tecnológico, enfrentam desafios nos quais o conhecimento matemático adquire um papel essencial, proporcionando conceitos, métodos, modelos e formas de pensar. Esse

poder matemático deve ser parte integrante da educação de todos os cidadãos, incluindo conhecimentos e capacidades que os jovens transportarão para a sua vida pessoal, social e profissional.

Empreender uma formação matemática abrangente e inovadora, neste ciclo de escolaridade, significa desenvolver nos alunos a capacidade de identificar conceitos matemáticos relevantes para resolver problemas reais, aplicar procedimentos matemáticos adequados e interpretar os resultados em contextos diversos. O pensamento matemático está na base dos processos de compreensão dos conceitos e objetos matemáticos, que podem e devem ser analisados, representados e relacionados de diferentes formas. São igualmente importantes a formulação de hipóteses, a testagem de conjeturas, a generalização e a abstração, na construção de argumentos lógicos e conclusões, cuja comunicação de forma apropriada é cada vez mais importante no mundo atual.

O currículo consagra o propósito de preparar os alunos para formularem juízos e tomarem decisões fundamentadas, contribuindo para que se tornem cidadãos reflexivos, empenhados e participativos. Visa também contribuir para que os jovens valorizem o papel da Matemática no mundo e o seu carácter de ciência em evolução e renovação permanente, apreciando a sua dimensão estética, a par do seu legado histórico.

Assim, o currículo de Matemática para o futuro orienta-se para o desenvolvimento de áreas de competências, à luz do que é preconizado no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória, nomeadamente no que se refere ao pensamento crítico aliado à resolução de problemas, promovendo a criatividade e a comunicação, além de acentuar a pertinência do trabalho colaborativo.

## 2. Ideias Inovadoras do Currículo

- Matemática para a Cidadania

O reconhecimento do Ensino Secundário como um ciclo que é parte integrante da formação geral dos jovens, incluído na escolaridade obrigatória, cria um contexto em que todas as disciplinas, incluindo a Matemática, devem contribuir para o desenvolvimento dos alunos enquanto cidadãos ativos, conscientes, informados e interventivos.

A crescente relevância do papel da Matemática na sociedade atual realça a importância e a necessidade de dotar os alunos de ferramentas de análise dos processos sociais, que estão na base do exercício de uma cidadania ativa. Assim, as Aprendizagens

Essenciais de MACS exploram modelos e processos eleitorais e a análise de modelos financeiros e valorizam o desenvolvimento da literacia estatística.

- **Pensamento Computacional**

Os aspetos comuns entre o Pensamento Matemático e o Pensamento Computacional, bem como a relevância atual do Pensamento Computacional na ciência e na sociedade, justificam que o currículo de Matemática valorize esta abordagem conceptual na resolução de problemas. As Aprendizagens Essenciais de MACS promovem o desenvolvimento de práticas como a abstração, a decomposição, o reconhecimento de padrões, a análise e definição de algoritmos, bem como a aquisição de hábitos de depuração e otimização dos processos envolvidos na atividade matemática. Deste modo, a aposta no Pensamento Computacional revela a aproximação do currículo às recomendações internacionais, designadamente em relatórios da União Europeia, e também o alinhamento com o currículo de Matemática do Ensino Básico, favorecendo o desenvolvimento desta capacidade de forma integrada, coerente e progressiva.

- **Diversificação de temas no currículo**

Para além do desenvolvimento de competências dos alunos no âmbito da cidadania, pretende-se continuar a disponibilizar aos alunos um conjunto variado de ferramentas matemáticas. Assim, aposta-se na diversificação de temas matemáticos, e das abordagens a cada tema, valorizando o recurso à tecnologia.

- **Matemática para todos**

Assume-se que o currículo na escolaridade obrigatória deve dar resposta a todos os alunos, tendo em vista a sua formação matemática enquanto cidadãos, proporcionando-lhes uma experiência rica, adequada ao seu nível etário e ao alcance de todos. Os formalismos e os níveis de abstração excessivos deverão ser preteridos em favor de uma perspetiva de identificação do poder da Matemática na interpretação da realidade. Pretende-se que a matemática seja um contributo para a resolução de problemas, possibilitando que os alunos mobilizem e desenvolvam o seu raciocínio com vista à tomada de decisões e à construção e uso de estratégias.

### 3. Ideias chave das Aprendizagens Essenciais

As Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Secundário dão continuidade às aprendizagens do Ensino Básico e assumem um conjunto de princípios e orientações metodológicas, cuja concretização e especificação é feita para cada ano de escolaridade e tema matemático. A seguir, enunciam-se e apresentam-se as nove ideias chave preconizadas nas Aprendizagens Essenciais, esquematizadas na Figura 1:

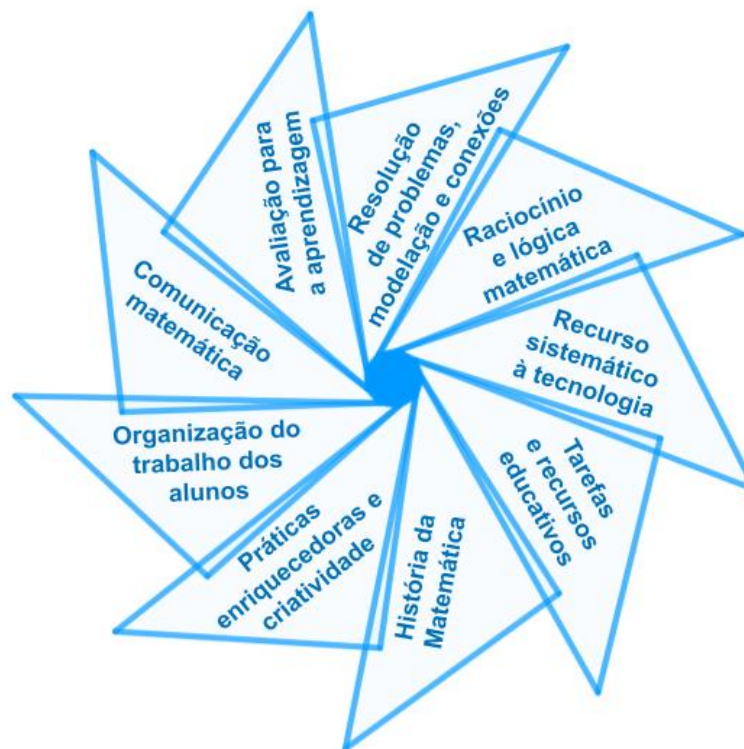


Figura 1 - Ideias chave das Aprendizagens Essenciais

## 1) Resolução de problemas, modelação e conexões

### *Dar sentido à Matemática e enfatizar a modelação e as aplicações*

A resolução de problemas, tal como a modelação, devem constituir o contexto para o estabelecimento de conexões entre diferentes conceitos e áreas da Matemática, assim como entre a Matemática e outras áreas do saber, permitindo uma abordagem integrada e significativa para os alunos na sua atividade matemática. É fundamental que os alunos tenham contacto com o processo de modelação matemática e sejam capazes de criticar, validar e aperfeiçoar modelos matemáticos. Preconizando a exploração de ideias e conceitos matemáticos, pretende-se que a aprendizagem não se reduza à memorização de regras, ao treino de procedimentos ou à sua execução sem compreensão. É essencial que as definições, os resultados e os procedimentos matemáticos adquiram sentido e que os alunos os saibam mobilizar e aplicar adequadamente para resolver problemas do mundo real, em situações do dia-a-dia ou de outras disciplinas. Uma das áreas de competências no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória, fortemente ligada à Matemática - Raciocínio e resolução de problemas - implica que os alunos sejam capazes de: i) interpretar informação, planear e conduzir pesquisas; ii) gerir informações e tomar decisões; iii) desenvolver processos conducentes à construção de conhecimento, usando recursos diversificados.

## 2) Raciocínio dedutivo e lógica matemática

### *Incentivar processos de raciocínio dedutivo, integrando a lógica matemática nos diversos temas*

O aluno deve ser sistematicamente incentivado a justificar processos de resolução, a encadear raciocínios e a formular e validar conjecturas. Os conceitos e métodos relativos à lógica matemática não constituem um tema específico das Aprendizagens Essenciais, mas devem, de forma natural, ser integrados nos vários temas abordados. A integração do raciocínio dedutivo e da lógica, bem como da linguagem matemática e simbólica, deve estar presente em todos os momentos de aprendizagem, sem se transformar num conteúdo tratado de forma isolada. O grau de formalização a utilizar deve ter sempre em conta o nível de maturidade matemática dos alunos e deve surgir, se possível, como uma necessidade, garantindo que o processo de formalização acompanha a apropriação dos conceitos. Diversos temas, como, por exemplo, Modelos de Grafos ou Probabilidade, em contexto de resolução de problemas, podem constituir-se como excelentes oportunidades para desenvolver o raciocínio dedutivo, no qual se inclui a utilização de linguagem e de notações adequadas.

### 3) Recurso sistemático à tecnologia

***Incentivar a exploração de ideias e conceitos, integrando a tecnologia como alavanca para a compreensão e resolução de problemas.***

A abordagem exploratória de ideias e conceitos matemáticos apresenta-se como determinante, o que pressupõe levar o aluno a participar ativamente num processo de construção e aprofundamento, motivado por questões desafiadoras, problemas e procura de justificações. A integração da tecnologia é considerada como indispensável nesse processo, pelas possibilidades que oferece de experimentação, visualização, representação, simulação, interatividade, bem como, evidentemente, de cálculo numérico e simbólico. O recurso à folha de cálculo e a aplicativos digitais, explorados em computadores, smartphones ou calculadora gráfica, deve ser feito de forma sistemática. O pensamento computacional deve ser integrado com uma complexidade progressiva, desenvolvendo processos algorítmicos, um pensamento estruturado e o raciocínio lógico, proporcionando um vasto campo de aplicação da Matemática e envolvendo genuinamente a formulação e a resolução de problemas.

### 4) Tarefas e recursos educativos

***Apoiar a aprendizagem em tarefas, contextos e recursos diversificados***

A construção de tarefas de aprendizagem constitui uma das ações decisivas do professor. Uma tarefa matemática enriquecedora pode assumir a forma de um problema, uma questão exploratória, um exercício de aplicação, um pequeno projeto ou uma pesquisa de aprofundamento, sempre que observe os seguintes critérios: ser interessante e desafiante, envolver matemática relevante, criar oportunidades para aplicar e ampliar conhecimentos, permitir diferentes estratégias, tornar possível monitorizar a compreensão dos alunos e apoiar o seu progresso. As tarefas devem ser, ainda, diversificadas e ajustadas aos objetivos de aprendizagem e a sua planificação deve prever diferentes tipos de organização do trabalho dos alunos. A utilização de recursos variados, nomeadamente da tecnologia, bem como a diversificação de contextos de aprendizagem, incluindo laboratórios, espaços fora da sala de aula, museus de ciência e outros, deverão merecer especial atenção na construção de tarefas.

## 5) História da Matemática

### *Valorizar a importância da Matemática na evolução da sociedade*

O recurso a episódios e problemas marcantes da História da Matemática deve motivar pesquisas, estudos ou debates, não de caráter enciclopédico, mas contribuindo para que o progresso da Matemática seja apreciado e compreendido. Para além do seu valor intrínseco, enquanto património cultural que importa valorizar, existem numerosos factos, aspetos particulares e episódios da História da Matemática que, pelo seu potencial pedagógico, devem ser explorados em tarefas dentro e fora da sala de aula. Os professores devem aproveitar os factos contemporâneos da História da Matemática para levar os alunos a entender o papel determinante da Matemática na sociedade atual. Por exemplo, podem ser referidas as primeiras Medalhas Fields atribuídas a mulheres matemáticas, a importância dos modelos matemáticos para entender a crise climática, o estudo matemático das epidemias ou o papel dos modelos matemáticos na exploração espacial.

## 6) Práticas enriquecedoras e criatividade

### *Inovar e investir em práticas enriquecedoras, favorecendo o desenvolvimento da criatividade e atitudes positivas face à Matemática*

O currículo integra propostas inovadoras, que incluem a realização de projetos, de profundidade e extensão ajustados às condições existentes e aos alunos. É igualmente recomendado que os alunos se envolvam na resolução de questões e problemas autênticos em contextos de interdisciplinaridade. A programação, tal como a modelação ou o trabalho de projeto, abrem inúmeras vias de trabalho promissoras que não devem ser ignoradas. Também a beleza da Matemática, a sua aplicabilidade e a história fascinante que a envolve são fortes motivos para inovar através de práticas de enriquecimento das aprendizagens. É importante que os alunos experimentem o prazer da descoberta em Matemática e que desenvolvam o gosto pelo desafio, pela procura de soluções e pela sua comunicação. Dar aos alunos oportunidades de aprenderem matemática significativa contribui para que desenvolvam atitudes positivas em relação à disciplina. Estimular a curiosidade, o interesse, a motivação e a criatividade é essencial para que reconheçam a importância da Matemática na sua formação pessoal e académica e adquiram autoconfiança, sentindo-se capazes de raciocinar e comunicar matematicamente. O contexto socioemocional que permeia a aprendizagem da Matemática tem grande influência sobre a imagem que os jovens constroem da disciplina, sendo determinante na formação de cidadãos críticos, reflexivos, que se sintam capazes de tomar decisões e de formular e resolver problemas de forma criativa e eficiente.

## 7) Organização do trabalho dos alunos

### ***Valorizar o trabalho colaborativo num ambiente de entreeajuda e corresponsabilização, cultivando comunidades de aprendizagem***

A valorização do trabalho colaborativo é assumida enquanto estratégia de aprendizagem e enquanto competência a desenvolver nos jovens na sociedade atual. A colaboração é especialmente indicada em tarefas nas quais os alunos possam discutir e definir abordagens e processos de resolução, confrontar ideias e contribuir para um objetivo comum. É também uma forma de trabalho em que os alunos se devem apoiar mutuamente, envolvendo-se em processos matemáticos, argumentação e comunicação, valorizando as competências individuais de cada um. Assim, o trabalho em pares e em pequenos grupos é adequado em múltiplas situações de aprendizagem, desde a realização de tarefas curtas, passando por situações que envolvem pesquisa, recolha de dados, modelação, até ao desenvolvimento de projetos.

## 8) Comunicação matemática

### ***Comunicar recorrendo a representações múltiplas, com clareza e rigor e um nível de formalização adequado***

A comunicação matemática, a par do raciocínio e do pensamento crítico, está presente quando os alunos interpretam gráficos, esquemas, diagramas ou dados, justificam afirmações, utilizam diferentes representações, escrevem e criticam explicações e argumentos matemáticos, com simbologia adequada e produzindo encadeamentos lógicos. Importa pôr em prática diversos tipos de comunicação, dando espaço às discussões coletivas e em pequenos grupos, apresentações orais e/ou escritas, elaboração de relatórios e composições, publicações e exposições, que são essenciais no processo de desenvolvimento de conceitos ou processos matemáticos. A simbologia constitui um sistema de representação matemática robusto que deve ser relacionado com outros modos de representação, tendo em vista a sua utilização oportuna, nomeadamente no âmbito da comunicação matemática. A formalização de conceitos e resultados matemáticos é uma etapa importante da aprendizagem que não se alcança por meio do excesso de manipulação simbólica ou pela prática de artifícios de cálculo demasiadamente técnicos.



## 9) Avaliação para a aprendizagem

### *Privilegiar a avaliação formativa na regulação do processo de aprendizagem*

A abordagem exploratória que se privilegia implica a integração da avaliação no processo de aprendizagem. É necessário que a avaliação seja um processo, e não um fim, e que esteja ao serviço da aprendizagem dos alunos, de modo a favorecê-la. A diversificação de formas e instrumentos de avaliação é uma das práticas de avaliação recomendadas. Constituem boas tarefas de avaliação formativa as resoluções detalhadas de tarefas, os relatórios e os cartazes. A produção de documentos de natureza audiovisual é igualmente válida e apelativa, designadamente sob a forma de pequenos vídeos, criação de páginas e blogs, tirando partido de ferramentas digitais. As partilhas de ideias e conclusões em sala de aula, bem como as apresentações orais, constituem boas oportunidades para monitorizar e acompanhar o desenvolvimento das aprendizagens e identificar dificuldades e obstáculos.

## 4. Operacionalização das Aprendizagens Essenciais

A disciplina de MACS assume um papel estruturante no Curso de Línguas e Humanidades. As Aprendizagens Essenciais do 10.º ano integram uma vertente de formação matemática para a cidadania, em consonância com as restantes disciplinas de Matemática do Ensino Secundário. Esta vertente é concretizada nos temas de Eleições e Partilha, Literacia Financeira e Estatística. Os alunos a quem a esta disciplina se destina, estudam estes temas de uma forma mais aprofundada e integrada pela natureza do seu percurso académico e do papel esperado para a Matemática na sua formação enquanto cidadãos.

No 11.º ano as Aprendizagens Essenciais de MACS preconizam o aprofundamento do estudo de modelos matemáticos que permitem descrever e analisar a realidade, nomeadamente modelos de grafos e modelos populacionais. É ainda proposto uma ampliação do pensamento estatístico pela abordagem de modelos de probabilidade em casos discretos e contínuos e de uma introdução à inferência estatística.

O trabalho de projeto assume uma dimensão relevante, surgindo explicitamente no 10.º ano e no 11.º ano. Em cada um destes anos deverá ser desenvolvido pelo menos um dos projetos propostos, mas poderá ser também uma proposta de trabalho em qualquer tema que o professor considere adequado.

As Aprendizagens Essenciais relativas a MACS do Curso de Línguas e Humanidades concretizam-se em dois documentos distintos. A organização das Aprendizagens Essenciais, que a seguir se detalha, é apresentada em quatro áreas:

- *Temas, Tópicos e Subtópicos matemáticos*, em que são identificados os conceitos matemáticos a abordar.
- *Objetivos de aprendizagem: conhecimentos, capacidades e atitudes que o aluno deve revelar*, em que são concretizadas, para cada tópico matemático, as aprendizagens visadas com a indicação do foco e da especificação preconizada.
- *Ações estratégicas de ensino do professor*, onde é clarificado o papel do professor e as indicações metodológicas que são consideradas adequadas para atingir os objetivos de aprendizagem definidos, bem como a sugestão de exemplos para a concretização das atividades a propor aos alunos. São também dadas indicações para clarificar os níveis de dificuldade que se consideram parte integrante destas Aprendizagens Essenciais.
- *Áreas de competência do perfil dos alunos*, em que é estabelecida uma ligação entre as aprendizagens matemáticas visadas, as indicações metodológicas e as competências, capacidades e atitudes definidas no *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*.

Para cada tema são incluídas notas clarificadoras, nomeadamente no que se refere à sugestão de: atividades para o desenvolvimento do Pensamento Computacional, com recurso a exemplos; propostas de possíveis aprofundamentos de alguns temas ou de abordagens alternativas; referências bibliográficas que incluem documentos e recursos para apoio ao trabalho do professor.

A ordem dos temas apresentados, nestas Aprendizagens Essenciais, constitui um exemplo de uma sequência que se considera adequada no âmbito do processo de gestão e desenvolvimento do currículo.

Na tabela abaixo apresenta-se uma possível distribuição dos tempos letivos pelos tópicos das Aprendizagens Essenciais, tomando como referência vinte e oito semanas letivas, num total de trinta e duas ou trinta e três semanas previstas usualmente no calendário escolar. Considerou-se cada semana com cinco tempos letivos de cinquenta minutos.

Temas	Tópicos	Aulas (50 min)	Semanas
<b>Métodos de apoio à decisão</b>	Modelos matemáticos nas eleições	20	8
	Modelos matemáticos na partilha	20	
<b>Estatística</b>	Problema estatístico + População e amostra	3	12
	Dados univariados	25	
	Dados bivariados	20	
	[Trabalho de projeto]	12	
<b>Modelos matemáticos</b>	Modelos financeiros	10	8
	Matemática nos salários	15	
	Matemática na poupança e no crédito	15	
		<b>Total</b>	<b>28</b>

ÁREAS DE  
COMPETÊNCIAS  
DO PERFIL  
DOS ALUNOS  
(ACPA)



## OPERACIONALIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
<p><b>MODELOS MATEMÁTICOS PARA A CIDADANIA</b></p> <p>Modelos matemáticos nas eleições</p> <p>Maioria simples</p> <p>Maioria absoluta</p>	<p>Reconhecer o papel da matemática na escolha de representantes em sistemas políticos e sociais.</p> <p>Perceber que existem modelos matemáticos que permitem criar procedimentos para transformar as preferências individuais numa decisão coletiva.</p> <p>Identificar o vencedor de um processo eleitoral através de maioria simples e maioria absoluta.</p>	<p>Promover a consciencialização de que o voto é um assunto que está no cerne duma democracia participativa.</p> <p>Contribuir para o reconhecimento da necessidade da matemática para definir métodos eleitorais.</p> <p>Contribuir para a clarificação da importância da participação de cada cidadão na eleição dos seus representantes (delegado de turma, associação de estudantes, estruturas sindicais e poderes políticos).</p> <p>Dar a conhecer o método eleitoral para a eleição do Presidente da República Portuguesa.</p>	<p>Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A)</p> <p>Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avaliando, validando e organizando a informação recolhida (B)</p>

<p>Método de Borda</p>	<p>Conhecer e compreender diferentes sistemas de votação.</p> <p>Identificar o vencedor de processos eleitorais que recorram a boletins de preferência (método de Borda).</p>	<p>Promover a análise, a interpretação e a discussão de sistemas eleitorais que valorizem a existência de uma segunda volta, como é o caso da eleição do Presidente da República de Portugal, nomeadamente a referência à eleição presidencial de 1986.</p> <p>Propor a construção de um programa simples em <i>Python</i> (de iniciação à linguagem) que permita determinar o número de votos que garante a maioria absoluta, sendo inseridas as votações em 3 candidatos.</p> <p>Propor a exploração de diferentes sistemas de votação, por ordem de preferência, maioritário com duas ou mais voltas, de aprovação e outros. A aplicação de cada sistema deve resultar da análise da sua descrição e acompanhado de uma pequena análise das suas principais consequências.</p> <p>Propor a análise de situações que evidenciem claramente o facto de métodos eleitorais diferentes gerarem escolhas diferentes para a mesma votação, recorrendo a contextos eleitorais concretos, como por exemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- eleição do delegado de turma;</li> <li>- eleição para a Associação de Estudantes;</li> <li>- eleições para os órgãos sociais de clubes desportivos.</li> </ul> <p>Referir que todos os métodos eleitorais têm limitações, nomeadamente, encorajar o debate de situações em que existe e em que não existe transitividade das escolhas, como por exemplo o paradoxo de Condorcet.</p> <p>Dar a conhecer que o teorema de Arrow, que mostra as limitações de um sistema eleitoral, pode ser trabalhado com diferentes níveis de aprofundamento, podendo, contudo, fazer-se apenas uma breve referência à sua existência.</p>	<p>Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C)</p> <p>Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D)</p> <p>Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)</p>
------------------------	---	--	--

<p>Modelos matemáticos na partilha</p> <p>Partilha nos casos discreto e contínuo</p>	<p>Perceber que existem modelos matemáticos que permitem criar procedimentos para fazer distribuições proporcionais.</p> <p>Compreender como se contabilizam os mandatos nalgumas eleições.</p> <p>Conhecer e aplicar o método de Hondt e outros métodos.</p> <p>Compreender que os resultados podem ser diferentes se os métodos de contabilização dos mandatos forem diferentes.</p>	<p>Propor a exploração de diferentes sistemas de contabilização proporcional de mandatos que poderão ser aplicados. Cada sistema estudado deve ser acompanhado de uma pequena análise das suas principais consequências. A aplicação de cada sistema deve resultar da análise da sua descrição e acompanhado de uma pequena análise das suas principais consequências.</p> <p>Promover discussões sobre problemas de partilha, identificando os modelos matemáticos que contribuem para as diversas resoluções.</p> <p>Analisar com os alunos os contextos eleitorais das eleições autárquicas e das eleições para a Assembleia da República, suscitando a compreensão da necessidade de um método de partilha proporcional.</p> <p>Incentivar os alunos a confirmar o processo da distribuição de mandatos num organismo local (eleições com um número reduzido de mandatos - até 6 mandatos).</p> <p>Promover a exploração, com recurso à tecnologia gráfica (folha de cálculo), de distribuições de mandatos em cenários nacionais (eleições com um número elevado de mandatos, por exemplo, a distribuição de mandatos por círculo eleitoral).</p> <p>Propor a análise de situações concretas que evidenciem claramente que métodos de partilha diferentes geram distribuições diferentes para a mesma eleição, por exemplo, as eleições europeias de 1987.</p> <p>Promover a análise de casos em outras situações, como por exemplo, a distribuição de um número de computadores por departamentos com diferentes dimensões.</p> <p>Promover discussões sobre problemas de partilha, identificando os modelos matemáticos que contribuem para as diversas soluções e limitações na sua aplicação.</p>	<p>Preocupa-se com a construção de um futuro sustentável e envolve-se em projetos de cidadania ativa (G)</p> <p>Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)</p>
--	--	--	--

	<p>Compreender as limitações da partilha equilibrada quando se dividem bens que não se podem fracionar.</p> <p>Compreender a diferença da partilha em casos discretos e contínuos.</p> <p>Compreender as vantagens da partilha em métodos livres de inveja.</p> <p>Definir a partilha em casos concretos a partir da análise da descrição de diferentes métodos nos casos discreto e contínuo.</p>	<p>Propor o estudo de situações paradoxais em que o aumento do número total de mandatos implica a perda de mandatos atribuídos a um partido, para a mesma votação.</p> <p>Sensibilizar os alunos para o carácter subjetivo da valorização de um bem, para as consequências desta subjetividade na partilha e conhecer métodos que permitam integrar esta condicionante na partilha.</p> <p>Sensibilizar os alunos para a pluralidade de métodos que é possível definir e para a sua adequabilidade a cada situação (heranças, distribuição de espaço, atribuição de tarefas partilhadas) e alertar para a necessidade de compreender um método através da análise do respetivo algoritmo.</p> <p>Comparar a aplicação de dois algoritmos que produzam resultados diferentes numa mesma situação.</p>	
--	--	--	--

### Pensamento Computacional

Quando se trabalharem algoritmos, convém incentivar hábitos de rigor aos alunos e fomentar práticas sistemáticas de verificação e controlo. Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser incentivados a identificar os elementos importantes, no processo de criação do algoritmo, e estabelecer a ordem entre eles.

Antes de redigir o programa na linguagem *Python*, convém fazer uma descrição do algoritmo em linguagem natural.

Exemplo de programa em *Python* que permite determinar o número de votos que garante a maioria absoluta, sendo inseridas as votações de 3 candidatos.

```
cA=int(input("N.º de votos do candidato A:"))
cB=int(input("N.º de votos do candidato B:"))
cC=int(input("N.º de votos do candidato C:"))
ma=int((cA+cB+cC)/2)+1
print(ma)
```



Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

A conclusão é que para obter maioria absoluta são precisos *ma* votos. Algum dos candidatos ultrapassou esse valor? Podem ser trabalhadas simulações, procurando por exemplo o número mínimo e máximo de votos para um partido obter um número predeterminado de lugares (por exemplo, todos os mandatos serem atribuídos ao mesmo partido). Uma simulação do método de Hondt pode ser encontrada em: <https://www.sg.mai.gov.pt/AdministracaoEleitoral/MetodoHondt/Paginas/default.aspx>.

Numa possível extensão a este programa poderá ser verificado se algum dos candidatos obteve maioria absoluta. Exemplo de programa em *Python* que permite, sendo inseridas as votações de 3 candidatos, determinar o número de votos que garante a maioria absoluta e verificar se algum dos candidatos obteve essa maioria.

```
cA=int(input("N.º de votos do candidato A:"))
cB=int(input("N.º de votos do candidato B:"))
cC=int(input("N.º de votos do candidato C:"))
ma=int((cA+cB+cC)/2)+1
print("Serão necessários pelo menos",ma,"votos para obter maioria absoluta.")
if cA>=ma:
    print("O candidato A obteve maioria absoluta com",cA,"votos.")
elif cB>=ma:
    print("O candidato B obteve maioria absoluta com",cB,"votos.")
elif cC>=ma:
    print("O candidato C obteve maioria absoluta com",cC,"votos.")
else:
    print("Nenhum dos candidatos obteve maioria absoluta.")
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

### **Possíveis aprofundamentos**

Exemplo de um caso interessante a estudar: a mudança do uso de maioria simples para a maioria absoluta ao longo dos anos na Ordem dos Médicos e na Ordem dos Advogados.

Também pode ser feita a comparação com o método usado nas eleições para a Ordem dos Enfermeiros em que a lista vencedora é a que obtiver mais votos, sem exigência de maioria absoluta (e só com uma volta). Neste último caso pode ser consultada a página

<https://www.ordemenfermeiros.pt/arquivo/comunicacao/Paginas/ProclamacaoEleicoes> onde se encontra a proclamação dos resultados definitivos das Eleições de 12 de dezembro de 2011.

### Bibliografia de referência

- Chalub, F. (2019). O ano de todas as eleições. *Gazeta de Matemática*, nº 188, p. 9-11.  
CNE, *Eleições / Referendos*. Obtido de: <https://www.cne.pt/content/eleicoes-referendos>.  
CNE, *Método de Hondt*. Obtido de <https://www.cne.pt/content/metodo-de-hondt>.  
Feiteira, R. (2007). O que têm em comum a eleição de um delegado de turma e as eleições legislativas? *Gazeta de Matemática*, nº 152, p. 32-37.  
Feiteira, R. (2008). Alguns métodos eleitorais através do Excel, *Educação & Matemática*, nº 96, p. 29-33.  
Lopes, A. V., & Moreirinha, O. (2004). Materiais para a Aula de Matemática - Métodos de apoio à decisão: Plínio, o jovem. *Educação & Matemática*, nº 79, p. 25.  
Lopes, A. V. et al. (2002). Materiais para a aula de Matemática - Eleições para a Presidência da República -1986. *Educação & Matemática*, nº 67, p. 34-35.  
Malkevitch, J. (1999). *Teoria Matemática das Eleições*. COMAP (tradução portuguesa da responsabilidade do DES, Lisboa). Obtido de <https://www.dge.mec.pt/recursos-multimedia-online>.  
Ministério da Educação e Ciência (2013). *Referencial de Educação Financeira para a Educação Pré-Escolar, o Ensino Básico, o Ensino Secundário e a Educação e Formação de Adultos*, Obtido de: [https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/ficheiros/referencial\\_de\\_educacao\\_financeira\\_final\\_versao\\_port.pdf](https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/ficheiros/referencial_de_educacao_financeira_final_versao_port.pdf).  
Nascimento, N. H. A. (2015). *Matemática e educação financeira: um estudo de caso do Ensino Secundário*. (Dissertação de Mestrado). Universidade Nova de Lisboa. Obtido de <http://hdl.handle.net/10362/16356>.

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
<p><b>ESTATÍSTICA</b></p> <p>Problema estatístico</p> <p>Variabilidade</p>	<p>Reconhecer o papel relevante desempenhado pela Estatística em todos os campos do conhecimento.</p> <p>Reconhecer a variabilidade como um conceito-chave de um problema estatístico.</p> <p>Conhecer e interpretar situações do mundo que nos rodeia em que a variabilidade está presente.</p>	<p>Promover a discussão na turma para identificar e formular questões estatísticas, cujas respostas dependam da recolha de dados.</p> <p>Propor a discussão de situações do mundo real envolvente em que a variabilidade está presente. Por exemplo, o político questiona se valerá a pena candidatar-se às próximas eleições autárquicas para o seu concelho; o diretor de um agrupamento escolar questiona a percentagem de alunos que almoçam diariamente na escola; o padeiro questiona quantos pães deve fazer por dia; o gerente de uma fábrica têxtil questiona qual o tamanho das camisas em que deverá investir.</p>	<p>Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avalia, valida e organiza a informação recolhida (B)</p>
<p>População, amostra e variável</p> <p>Fases de um procedimento estatístico</p>	<p>Identificar num estudo estatístico, população, amostra e a(s) característica(s) a estudar, que se designa(m) por variável(variáveis).</p> <p>Reconhecer as fases de um procedimento estatístico:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Produção ou aquisição de dados;</li> <li>- Organização e representação de dados;</li> <li>- Interpretação tendo por base as representações obtidas.</li> </ul>	<p>Alertar que os termos população e amostra se referem a conjuntos de unidades estatísticas, mas que estes termos também são usados para identificar os conjuntos de valores assumidos pela variável em estudo.</p> <p>Propor a recolha de informação nos jornais ou na internet sobre notícias que permitam:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- diferenciar os processos de recenseamento e sondagem (recolher dados sobre toda a população ou sobre uma amostra);</li> <li>- identificar exemplos de amostras enviesadas, nomeadamente amostras por conveniência e por resposta voluntária.</li> </ul>	<p>Analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas (C)</p> <p>Desenvolve ideias e projetos criativos com sentido no</p>

	<p>Reconhecer os métodos existentes para a seleção de amostras, no sentido de que estas sejam representativas das populações subjacentes, e de modo a evitar amostras enviesadas cujo estudo levaria a inferir conclusões erradas para as populações.</p> <p>Intuir que os problemas estatísticos em que se recorre a amostras para inferir para a população subjacente, não têm uma solução matemática única que se possa exprimir como verdadeiro ou falso.</p>	<p>Alertar para a necessidade de recolha de dados reais, como forma de responder a questões concretas.</p> <p>Promover a discussão sobre a dimensão da amostra a recolher, informando que esta dimensão depende muito da variabilidade presente na população subjacente e deverá ser tanto maior quanto maior for a dimensão da população. Informar que existem técnicas para definir quais as dimensões mínimas para garantir a precisão dos processos em que se pretende inferir para a população as propriedades verificadas na amostra. Chamar a atenção para que existem processos apropriados para a seleção das amostras de forma a garantir a aleatoriedade e a representatividade da população subjacente.</p> <p>Informar que a utilização da probabilidade vai permitir tomar uma decisão para a população, a partir do estudo da amostra, quantificando o erro cometido ou o grau de confiança nessa decisão, exemplificando com a forma como se transmite o resultado de uma sondagem eleitoral.</p>	<p>contexto a que dizem respeito, e testa e decide sobre a sua exequibilidade (D)</p> <p>Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)</p>
<p>Dados univariados</p> <p>Dados quantitativos discretos ou contínuos</p>	<p>Identificar dados quantitativos discretos ou contínuos.</p>	<p>Informar que quando se está a recolher dados quantitativos, isto é, a “medir” a variável em estudo sobre as unidades estatísticas selecionadas para a amostra, confrontamo-nos com duas situações: ou a variável assume um número finito ou infinito numerável de valores distintos, caso em que se diz <i>discreta</i>, e a observação assume a forma de uma <i>contagem</i>; ou a variável pode assumir qualquer valor num intervalo em <math>\mathbb{R}</math>, caso em que se diz <i>contínua</i>, e a observação assume a forma de uma <i>medição</i>.</p> <p>Salientar que a natureza dos dados não é uma característica necessariamente inerente à variável em estudo, porque pode depender da forma como é medida. Exemplificar com a variável Idade que é de tipo contínuo e que pode ser utilizada de forma</p>	<p>Trabalha com recurso a equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)</p>

<p>Organização de dados</p>	<p>Organizar e representar a informação contida em dados quantitativos discretos e contínuos em tabelas de frequências absolutas, absolutas acumuladas, relativas e relativas acumuladas e interpretá-las.</p> <p>Selecionar representações gráficas adequadas para cada tipo de dados identificando vantagens/inconvenientes, lembrando a construção de gráficos de barras, diagramas de caule-e-folhas e diagramas de extremos-e-quartis.</p>	<p>discreta (10, 15, 23,...), uma peça de roupa, cujo “tamanho” é uma variável contínua, mas é frequentemente classificada em categorias (XS, S, M, L, XL, ...), isto é, dados de tipo qualitativo.</p> <p>Promover a utilização da tecnologia para construir tabelas e gráficos.</p> <p>Realçar a utilidade do diagrama de caule-e-folhas para uma ordenação rápida dos dados e salientar a importância do diagrama de extremos-e-quartis para comparar várias distribuições de dados.</p>	
<p>Histograma</p>	<p>Reconhecer que o histograma é um diagrama de áreas, e que para a sua construção é necessária uma organização prévia dos dados em classes na forma de intervalos.</p> <p>Construir histogramas, considerando classes com a mesma amplitude.</p>	<p>Salientar que o aspeto do histograma depende do número de classes considerado, da amplitude de classe e do ponto onde se começa a considerar a construção da primeira classe (discutir com os alunos o que se entende por um número adequado de classes, chamando a atenção para que uma representação com muitas classes apresentará muita da variabilidade presente nos dados, não conseguindo fazer sobressair o padrão que se procura, enquanto que um número muito pequeno de classes esconderá esse padrão).</p> <p>Salientar a importância do gráfico de barras e do histograma para uma posterior seleção do modelo da população subjacente à amostra, respetivamente discreto ou contínuo.</p>	
<p>Medidas de localização</p>	<p>Interpretar as medidas de localização: média (<math>\bar{x}</math>) mediana (<math>M_e</math>), moda(s) (<math>M_o</math>) e percentis (quartis como caso especial) na caracterização da distribuição dos dados, relacionando-as com as representações gráficas obtidas.</p>	<p>Incentivar a utilização da tecnologia para o cálculo das diversas medidas, em particular quando a dimensão da amostra é razoavelmente grande, não negligenciando antecipadamente o cálculo dessas medidas usando papel e lápis para amostras de dimensão reduzida.</p>	
<p>Medidas de dispersão</p>	<p>Interpretar as medidas de dispersão, amplitude, amplitude interquartil e desvio padrão amostral, <math>s</math>, (variância amostral <math>s^2</math>) na caracterização da</p>	<p>Propor a elaboração de um programa simples em <i>Python</i> que permita recolher as idades de, por exemplo, 5 alunos de uma turma na disciplina de Matemática, organizá-las sob a forma de</p>	

<p>Propriedades das medidas</p>	<p>distribuição dos dados, relacionando-as com as representações gráficas obtidas.</p> <p>Compreender os conceitos e as seguintes propriedades das medidas:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Pouca resistência da média e do desvio padrão;</li> <li>- Desvio padrão é igual a zero equivale a que os dados sejam todos iguais;</li> <li>- Amplitude interquartil igual a zero, não implica a não existência de variabilidade;</li> </ul> <p>Conhecer que se os dados forem fornecidos já agrupados em classes, na forma de intervalos, torna-se necessário adequar as fórmulas ou os procedimentos existentes para dados não agrupados, para obter valores aproximados da média e do desvio padrão.</p> <p>Reconhecer que existem situações em que é preferível utilizar, como medida de localização, do centro da distribuição dos dados, a mediana em vez da média, e como medida de dispersão a amplitude interquartil em vez do desvio padrão, apresentando exemplos simples.</p> <p>Reconhecer que algumas representações gráficas são mais adequadas que outras para comparar conjuntos de dados, nomeadamente o diagrama de extremos e quartis, para comparar a distribuição de dois ou mais conjuntos de dados, realçando aspetos de simetria, dispersão, concentração, etc.</p>	<p>uma lista, retornando a média, a mediana, o máximo e o mínimo.</p> <p>Promover a utilização da tecnologia para explorar as propriedades das medidas, nomeadamente as alterações provocadas nas medidas de localização e dispersão por transformação dos dados pela adição de uma constante a cada um e pela multiplicação por uma constante. Realçar a utilização enganadora da média, em casos em que existem <i>outliers</i> (dados muito diferentes do padrão dos restantes), devido à grande influência desses dados.</p> <p>Conduzir os alunos na compreensão da medida de variabilidade em relação à média, alertando para o facto da soma dos desvios em relação à média, por ser igual a zero.</p> <p>Incentivar os alunos a interpretar os conceitos e as propriedades das medidas, privilegiando a sua compreensão, em detrimento do uso de fórmulas e de procedimentos para as calcular. Por exemplo, depois de compreender o conceito de percentil, utilizar a função cumulativa ou as tabelas de frequências relativas acumuladas para calcular valores aproximados dessas medidas.</p> <p>Promover a utilização da tecnologia para determinar os percentis, e exemplificar a sua utilização com as tabelas de crescimento da DGS (<a href="https://www.dgs.pt/upload/membro.id/ficheiros/i007811.pdf">https://www.dgs.pt/upload/membro.id/ficheiros/i007811.pdf</a>) , relacionando o “peso” e a “estatura” com a “idade”.</p> <p>Promover a elaboração de um programa em <i>Python</i> para permitir o cálculo da amplitude e do desvio padrão e estudar as propriedades dessas medidas, efetuando alterações nos dados.</p> <p>Conduzir os alunos na interpretação das representações gráficas e das medidas, no contexto do problema, que levou à recolha dos dados.</p>	
---------------------------------	---	--	--

<p>Dados bivariados</p> <p>Dados quantitativos</p> <p>Diagrama de dispersão</p> <p>Coefficiente de correlação linear</p> <p>Reta de regressão - variável independente ou explanatória - variável dependente ou resposta.</p>	<p>Reconhecer que, para estudar a associação entre duas variáveis quantitativas de uma população, se observam essas variáveis sobre cada unidade estatística, obtendo-se uma amostra de pares de dados.</p> <p>Reconhecer a importância da representação dos dados no diagrama de dispersão, nuvem de pontos, para interpretar a forma, direção e força da associação (linear) entre as duas variáveis.</p> <p>Identificar o coeficiente de correlação linear <math>r</math>, como medida dessa direção e grau de associação (linear), e saber que assume valores pertencentes a <math>[-1,1]</math>, dizendo-se com base nesse valor que a correlação é positiva, negativa ou nula. Recorrer à tecnologia para proceder ao cálculo do coeficiente de correlação linear.</p> <p>Compreender que no caso do diagrama de dispersão mostrar uma forte associação linear entre as variáveis, essa associação pode ser descrita pela reta de regressão ou reta dos mínimos quadrados. Utilizar a tecnologia para determinar uma equação da reta de regressão.</p>	<p>Conduzir os alunos a explorar situações em que tenha interesse estudar a associação entre duas variáveis sobre as mesmas unidades estatísticas.</p> <p>Envolver os alunos na discussão sobre a construção do diagrama de dispersão, em especial na identificação da variável independente ou explanatória. Por exemplo, pretendendo-se estudar a associação entre as variáveis “idade” e “altura”, a variável independente ou explanatória deverá ser a “idade” e a variável “altura” a variável dependente ou resposta.</p> <p>Apresentar a expressão do coeficiente de correlação e utilizá-la para interpretar a associação linear entre as variáveis como positiva, negativa ou nula.</p> <p>Realçar que o coeficiente de correlação só assume os valores -1 ou 1, quando os pontos no diagrama de dispersão estão alinhados numa reta.</p> <p>Realçar e exemplificar que a correlação linear só mede a associação linear entre as variáveis, já que o coeficiente de correlação pode ser próximo de zero e as variáveis estarem fortemente correlacionadas, não linearmente.</p> <p>Realçar que só no caso de se visualizar uma associação aproximadamente linear entre os pontos do diagrama de dispersão é que tem sentido utilizar a tecnologia para calcular o coeficiente de correlação, bem como construir a reta de regressão.</p>	
--	--	---	--

<p>Gráfico de linhas</p>	<p>Compreender que na construção da reta de regressão não é indiferente qual das variáveis é que se considera como variável independente ou <i>explanatória</i>. Compreender que a existência de <i>outliers</i> influencia estes procedimentos.</p> <p>Utilizar a reta de regressão para inferir o valor da variável dependente ou resposta, para um dado valor da variável independente ou explanatória, quando existe uma forte associação linear entre as variáveis, quer positiva, quer negativa, e desde que este esteja no domínio dos dados considerados.</p> <p>Compreender que não se pode confundir correlação com relação causa-efeito, pois podem existir variáveis “perturbadoras” que podem provocar uma aparente associação entre as variáveis em estudo.</p> <p>Entender que um gráfico de linhas é um caso particular de um diagrama de dispersão, em que se pretende estudar a evolução de uma das variáveis relativamente a outra variável, de um modo geral o tempo, e em que se unem, por linhas, os pontos representados.</p>	<p>Comentar com os alunos a razão de se chamar à reta de regressão, reta dos mínimos quadrados.</p> <p>Propor a construção da reta de regressão, recorrendo à tecnologia e explorar a forma como é afetada por <i>outliers</i>. Exemplificar com os chamados “conjuntos de dados de Anscombe”, que embora apresentem as mesmas características amostrais, têm representações gráficas muito diferentes, realçando a importância de uma visualização prévia dos dados antes de proceder ao cálculo do coeficiente de correlação ou à construção da reta de regressão.</p> <p>Explorar o modelo da reta de regressão no contexto do estudo, nomeadamente inferindo valores da variável resposta para determinados valores para a variável explanatória.</p> <p>Propor a pesquisa na internet de situações em que existem variáveis “perturbadoras”.</p> <p>Promover a exploração de alguns exemplos concretos de gráficos de linhas, como a evolução da temperatura medida numa determinada hora, ao longo de um mês, em determinado local.</p>	
<p>Aprofundamento do estudo de Estatística com trabalho de projeto (*)</p>	<p>Aplicar e aprofundar conceitos e processos associados à Estatística num problema contextualizado, desenvolvendo competências de representação e comunicação matemática.</p> <p>Desenvolver hábitos de pesquisa.</p> <p>Interpretar de forma crítica informação, modelos e processos.</p>	<p>Discutir e estabelecer a elaboração de um trabalho de projeto, contemplando as diversas fases (formulação de um problema, planificação, realização de pesquisas, recolha de informações e dados, análise e interpretação de resultados e conclusões).</p> <p>Reservar momentos de trabalho na sala de aula para o desenvolvimento e acompanhamento, em grupo, do trabalho de projeto, incluindo a escrita do respetivo relatório.</p> <p>Propor a discussão da pertinência e da necessidade de usar recursos e tecnologia.</p>	



	<p>Conhecer, aplicar e criar modelos presentes na Estatística, tirando partido da tecnologia.</p> <p>Desenvolver a criatividade e a comunicação, através da apresentação do projeto em palestras, pôsteres, vídeos ou outros suportes.</p>	<p>Promover a divulgação, em grupo, destes trabalhos, podendo essa etapa acontecer na sala de aula ou ser alargada a outros espaços da escola e para além desta.</p> <p>Estimular a discussão do tema de cada investigação que pode ser escolhido de entre uma lista de opções, como por exemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- A minha região em números! O que diz o Censos 2021...;</li> <li>- A nossa Cantina Escolar em números!</li> <li>- Alterações climáticas. Os negacionistas têm razão ou há estatísticas a provar que não?</li> <li>- Como estão os nossos oceanos? (<i>Plasticus maritimus</i>, Planeta tangerina,...);</li> <li>- Somos oito mil milhões. Como estamos distribuídos?</li> </ul> <p>Valorizar aspetos relevantes da História da Matemática, ou o recurso à programação, sempre que for considerado relevante.</p>	
<p>(*) Este tópico pode ser substituído por tópico idêntico noutros temas do 10.º ano tal como é exemplificado nas propostas identificadas abaixo.</p>			

### Pensamento Computacional

Quando se trabalharem algoritmos, convém incentivar hábitos de rigor aos alunos e fomentar práticas sistemáticas de verificação e controlo. Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser incentivados a identificar os elementos importantes, no processo de criação do algoritmo, e estabelecer a ordem entre eles. Antes de redigir o programa na linguagem *Python*, convém fazer uma descrição do algoritmo em linguagem natural.

Exemplo de programa em *Python* que permite recolher as idades de, por exemplo, 5 alunos de uma turma na disciplina de Matemática, organizá-los sob a forma de uma lista, retornando a média, a mediana, o máximo e o mínimo:

```
import statistics
print('Escreva as idades de 5 alunos')
idades=[]
for i in range(1,5):
    x = int(input('?'))
    idades=idades+[x]
idades.sort()
print('Idades:',idades)
print('Media:',statistics.mean(idades))
print('Mediana:',statistics.median(idades))
print('Máximo:',max(idades))
print('Mínimo:',min(idades))
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

Exemplo de programa em *Python* que permita recolher as idades de, por exemplo, 5 alunos de uma turma na disciplina de Matemática, organizá-los sob a forma de uma lista, retornando a média, a mediana, o desvio-padrão e a amplitude:

```
import statistics
n=int(input("Quantas disciplinas tens? "))
print("Escreve as tuas notas das disciplinas")
notas=[]
for i in range(0,n):
    x = int(input("?"))
    notas=notas+[x]
notas.sort()
print("Notas:",notas)
print("Media:",statistics.mean(notas))
print("Mediana:",statistics.median(notas))
print("Desvio-padrão:",statistics.stdev(notas))
print("Amplitude:",max(notas)-min(notas))
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

### Possíveis aprofundamentos

Explorar a utilização de tabelas de contingência (tabelas de dupla entrada) para representar amostras de dados bivariados qualitativos. Ter em consideração que embora se fale de dados qualitativos, eles podem ser resultado da observação de variáveis quantitativas (Exemplo a variável Idade, que é quantitativa contínua, mas em que os dados podem ser apresentados em classes etárias, ou a variável *Tamanho de uma camisola*, que pode ser medida nas categorias XS, S, M, L, XL, 2XL ou 3XL). Considerar as distribuições marginais e as distribuições condicionais e explorar a possível associação entre as variáveis. Utilizar representações gráficas adequadas.

Explorar diferentes tipos de amostragem que conduzam a amostras representativas das populações subjacentes, por oposição a processos que conduzam a amostras enviesadas.

### Bibliografia de referência

ActivAlea - *Associação entre variáveis quantitativas. O coeficiente de correlação*. Obtido de

[http://www.alea.pt/index.php?option=com\\_content&view=article&id=272&Itemid=1651&lang=pt](http://www.alea.pt/index.php?option=com_content&view=article&id=272&Itemid=1651&lang=pt).

ActivAlea - *Associação entre variáveis qualitativas*. Obtido de

[http://www.alea.pt/index.php?option=com\\_content&view=article&id=270&Itemid=1653&lang=pt](http://www.alea.pt/index.php?option=com_content&view=article&id=270&Itemid=1653&lang=pt)www.alea.pt.

COMAP (2016). *FOR ALL PRACTICAL PURPOSES - Mathematical Literacy in Today's World*. New York: W. H. Freeman and Company.

Correlações espúrias. Obtido de <http://tylervigen.com/spurious-correlations>.

Graça Martins, M. E. et al. (1997). *Estatística*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

Graça Martins, M. E. & Cerveira, A. (1998). *Introdução às Probabilidades e à Estatística*. Universidade Aberta.

Graça Martins, M. E. & Loura, L. (2002). *Estatística, Modelos de Probabilidade e Introdução à Inferência Estatística* (edição da responsabilidade do DES, Lisboa).

Obtido de <https://www.dge.mec.pt/recursos-multimedia-online>.

Graça Martins, M. E. (2005). *Introdução à Probabilidade e à Estatística, com complementos de Excel*. Sociedade Portuguesa de Estatística.

Grupo de trabalho T3. (1999). *Estatística e calculadoras gráficas*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Martins, H. & Domingos, A. (2018). *Estatística no Secundário com Calculadora Gráfica*. Nova.Fct Editorial.

Moore, D. (2019). *STATISTICS Concepts and controversies*. New York: W.H.Freeman and Company.

Moore, D. et al. (2021). *The Basic Practice of Statistics*. New York: W.H.Freeman and Company.

Rossman, A. et al. (2011). *Workshop Statistics: Discovery with Data*. Hoboken, NJ: Wiley.

Proposta 1

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
<p><b>Aprofundamento do estudo de Métodos de apoio à decisão com trabalho de projeto</b></p>	<p>Aplicar e aprofundar conceitos e processos associados aos Modelos Matemáticos para a Cidadania num problema contextualizado, desenvolvendo competências de representação e comunicação matemática.</p> <p>Desenvolver hábitos de pesquisa.</p> <p>Interpretar de forma crítica, informação, modelos e processos.</p> <p>Conhecer, aplicar e criar Modelos Matemáticos importantes para contextos eleitorais e de partilha, tirando partido da tecnologia.</p> <p>Desenvolver a criatividade e a comunicação, através da apresentação do projeto em palestras, pósteres, vídeos ou outros suportes.</p>	<p>Discutir e estabelecer a elaboração de um trabalho de projeto, contemplando as diversas fases (formulação de um problema, planificação, realização de pesquisas, recolha de informações e dados, análise e interpretação de resultados e conclusões).</p> <p>Reservar momentos de trabalho na sala de aula para o desenvolvimento e acompanhamento, em grupo, do trabalho de projeto, incluindo a escrita do respetivo relatório.</p> <p>Propor a discussão da pertinência e da necessidade de usar recursos e tecnologia.</p> <p>Promover a divulgação, em grupo, destes trabalhos, podendo essa etapa acontecer na sala de aula ou ser alargada a outros espaços da escola e para além desta.</p> <p>Estimular a discussão do tema de cada investigação que pode ser escolhido de entre uma lista de opções, como por exemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Eleições com círculos eleitorais uninominais ou regionais versus um círculo nacional único;</li> <li>- Casos concretos de eleições com colégio eleitoral (Estados Unidos, Estónia, Índia,...);</li> <li>- Eleições com dados “falsificados” (Lei de Benford);</li> <li>- Estudo de diferentes modos de eleger uma Associação de Estudantes, um delegado ou um subdelegado das turmas da escola.</li> </ul> <p>Valorizar aspetos relevantes da História da Matemática, ou o recurso à programação, sempre que for considerado relevante.</p>	<p>Desenvolve ideias e projetos criativos com sentido, no contexto a que dizem respeito, e testa e decide sobre a sua exequibilidade (D)</p> <p>Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)</p>

Proposta 2

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
<p><b>Aprofundamento do estudo de Modelos financeiros com trabalho de projeto</b></p>	<p>Aplicar e aprofundar conceitos e processos associados aos Modelos Matemáticos para a Cidadania num problema contextualizado, desenvolvendo competências de representação e comunicação matemática.</p> <p>Desenvolver hábitos de pesquisa.</p> <p>Interpretar de forma crítica, informação, modelos e processos.</p> <p>Conhecer, aplicar e criar Modelos Matemáticos financeiros importantes, tirando partido da tecnologia.</p> <p>Desenvolver a criatividade e a comunicação, através da apresentação do projeto em palestras, pósteres, vídeos ou outros suportes.</p>	<p>Discutir e estabelecer a elaboração de um trabalho de projeto, contemplando as diversas fases (formulação de um problema, planificação, realização de pesquisas, recolha de informações e dados, análise e interpretação de resultados e conclusões).</p> <p>Reservar momentos de trabalho na sala de aula para o desenvolvimento e acompanhamento, em grupo, do trabalho de projeto, incluindo a escrita do respetivo relatório.</p> <p>Propor a discussão da pertinência e da necessidade de usar recursos e tecnologia.</p> <p>Promover a divulgação, em grupo, destes trabalhos, podendo essa etapa acontecer na sala de aula ou ser alargada a outros espaços da escola e para além desta.</p> <p>Estimular a discussão do tema de cada investigação que pode ser escolhido de entre uma lista de opções, como por exemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Análise de um projeto de investimento, através do cálculo do valor atual de fluxos financeiros futuros previstos.</li> <li>- Cálculos das prestações constantes em empréstimos e comparação com os simuladores em sites de bancos e empresas financeiras.</li> </ul> <p>Valorizar aspetos relevantes da História da Matemática, ou o recurso à programação, sempre que for considerado relevante.</p>	<p>Desenvolve ideias e projetos criativos com sentido, no contexto a que dizem respeito, e testa e decide sobre a sua exequibilidade (D)</p> <p>Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)</p>

**Bibliografia de referência (trabalhos de projeto)**

- Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a matemática: a experiência do projecto mat789*. (Tese de Doutoramento). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Amado, N. & Carreira, S. (2019). *Trabalho de Projeto*. Obtido de: <http://hdl.handle.net/10400.1/15482>.
- George Lucas Educational Foundation (2021). *Project-Based Learning (PBL)*. Obtido de: <https://www.edutopia.org/project-based-learning>.
- Mestre, A. P. (2011). *Histórias com matemática: trabalho de projecto no 2º ciclo do ensino básico*. (Dissertação de Mestrado). Obtido de: <http://hdl.handle.net/10400.1/6872>.
- Ponte, J. P., Brunheira, L., Abrantes, P., & Bastos, R. (1998). *Projetos Educativos: matemática - ensino secundário*. Ministério da Educação.

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
<p><b>MODELOS MATEMÁTICOS EM FINANÇAS</b></p> <p>Modelos financeiros</p>	<p>Conhecer problemas matemáticos da área financeira (impostos, inflação, investimentos financeiros, empréstimos, tarifários, etc.).</p> <p>Identificar modelos matemáticos aplicados a situações financeiras reais.</p>	<p>Promover a identificação da relevância dos modelos financeiros para uma cidadania integrada e informada.</p> <p>Dinamizar a exploração de situações para compreender a importância dos modelos financeiros nas finanças pessoais.</p> <p>Negociar a escolha de situações a trabalhar, que devem ser acessíveis e familiares para os alunos. Por exemplo: orçamentos pessoais, impostos, diferentes tipos de contas e de empréstimos, custo de vida, inflação e análise de tarifários, situações de aluguer ou compra - vantagens e inconvenientes; etc. A utilização da calculadora e do computador (nomeadamente de folhas de cálculo) é particularmente útil na exploração de situações envolvendo várias variáveis.</p>	<p>Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A)</p> <p>Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avaliando, validando e organizando a informação recolhida (B)</p>
<p><b>Matemática nos salários</b></p> <p>Salário bruto e salário líquido</p>	<p>Calcular o salário mensal, anual e por hora, dadas as condições de um contrato.</p> <p>Reconhecer a diferença entre salário bruto e salário líquido.</p> <p>Calcular contribuições obrigatórias para sistemas de segurança social.</p> <p>Calcular a retenção na fonte para IRS.</p>	<p>Dinamizar a realização de simulações relacionadas com processamento de salários (em que sejam utilizados os conceitos de vencimento líquido, salário bruto, abonos e descontos), promovendo a construção de uma folha de cálculo.</p> <p>Sugerir em grande grupo:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- uma discussão que inclua a identificação de diferentes formas de referência aos rendimentos e dificuldades de comparação (ex: rendimento anual, salário mensal, rendimento por hora);</li> </ul>	<p>Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C)</p> <p>Usa critérios para apreciar ideias,</p>

	<p>Calcular o IRS anual em casos simples em função do rendimento coletável.</p> <p>Compreender o carácter provisório da taxa mensal de retenção na fonte (IRS).</p> <p>Identificar a progressividade do IRS e a relevância dos escalões.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- a análise de exemplos relacionados com o processamento dos vencimentos (ex: recibos);</li> <li>- a pesquisa e análise de tabelas de IRS, identificação dos escalões aplicáveis e discussão sobre a progressividade deste imposto.</li> </ul>	<p>processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D)</p>
<p><b>Matemática na poupança e no crédito</b></p>	<p>Calcular juro simples e juro composto (com diferentes períodos de capitalização dos juros).</p> <p>Compreender o processo de capitalização com juro simples e juro composto.</p>	<p>Promover, com recurso à tecnologia, o cálculo de juros simples e compostos em diferentes situações.</p> <p>Analisar diferentes propostas de capitalização para verificar a mais vantajosa.</p> <p>Promover, em casos simples, usando a folha de cálculo, o cálculo do:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- capital obtido, através de uma capitalização de juro simples, num dado tempo, o capital final;</li> <li>- capital obtido, com diferentes capitalizações (mensal, anual, semestral) usando juro composto, num dado tempo, o capital final.</li> </ul> <p>Sugerir em grande grupo com recurso a simulações para depósitos a prazo, nos sites de diferentes entidades bancárias, a elaboração de um relatório sobre as diferentes propostas, analisando qual a mais vantajosa, pressupondo a entrega de um determinado montante de capital e um determinado prazo máximo.</p> <p>Analisar a rentabilidade de diferentes depósitos a prazo, durante um prazo predefinido, recorrendo à folha de cálculo e ao uso de simuladores disponíveis na Internet.</p> <p>Promover, em casos simples, o cálculo de, usando a folha de cálculo:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- do capital inicial a depositar para, ao fim de um determinado tempo dado (um ano, prazos superiores a um ano), ter um certo capital final com uma taxa de juro fixa;</li> <li>- do tempo mínimo de capitalização, dados os capitais inicial e final e a taxa de juro, com um determinado objetivo.</li> </ul>	<p>Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)</p> <p>É confiante, resiliente e persistente, construindo caminhos personalizados de aprendizagem de médio e longo prazo, com base nas suas vivências. (F)</p> <p>Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)</p>



### Pensamento Computacional

Quando se trabalharem algoritmos, convém incentivar hábitos de rigor aos alunos e fomentar práticas sistemáticas de verificação e controlo. Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser encorajados a identificar os elementos importantes, no processo de criação do algoritmo, e estabelecer a ordem entre eles.

Antes de redigir o programa na linguagem *Python*, convém fazer uma descrição do algoritmo em linguagem natural.

Podem propor-se vários tipos de programas em *Python* neste tema; por exemplo o cálculo do salário líquido sabendo a taxa de imposto a aplicar; ou um programa para simular o cálculo do preço de venda ao público de um produto em função do seu preço base e da sua taxa de IVA, ou em contrapartida, calcular o IVA a partir do preço final e da respetiva taxa.

Exemplo de programa em *Python* para calcular o preço de venda de um item a partir do seu preço base e da taxa de IVA:

```
p=float(input("Qual é o preço base do item? "))
iva=int(input("Qual é a taxa de IVA do item? (Introduza um dos valores: 6, 13 ou 23): "))
if iva==6 or iva==13 or iva==23:
    pf=p+p*iva/100
    print("O preço de venda com IVA incluído é",pf,"€")
else:
    print("Não existe uma taxa de IVA de",iva,"%")
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

Em alternativa à folha de cálculo, podem propor-se vários tipos de programas em *Python* para concretizar os Modelos Financeiros; por exemplo o cálculo de uma capitalização anual ou uma capitalização mensal, dado um capital inicial.

Exemplo de programa em *Python* para calcular a capitalização anual, dado um capital inicial:

```
ci=1000    #valor inicial
r=0.03     #taxa de juro anual
cf=ci+ci*r
print('O capital final é ',cf,'€')
```

Exemplo de programa em *Python* para calcular a capitalização mensal passados  $n$  meses, dado um capital inicial:

```
ci=300      #valor inicial
r=0.03      #taxa de juro anual
n=10        #número de períodos de capitalização
cf=ci*(1+r/12)**n
print('O valor final ao fim de ',n,' meses é', cf,'€')
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

Como possíveis alterações a este programa sugere-se a variação da periodicidade e do número de períodos de capitalização.

### **Possíveis aprofundamentos**

Avaliação financeira de um projeto de investimento, através do cálculo do valor atual de fluxos financeiros futuros previstos.

Cálculo das prestações constantes em empréstimos e comparação com os simuladores em sites de bancos e empresas financeiras.

Para os alunos de Ciências Sócio Económicas será recomendável que sejam fomentadas as conexões com assuntos e conceitos da disciplina de Economia.

Poderão ser abordados outros temas de Literacia Financeira, como por exemplo a elaboração de orçamentos familiares para diferentes tipos de agregados familiares (para um casal, com ou sem filhos, para um solteiro, vivendo sozinho ou com outras pessoas, etc.).

Pode ser igualmente sugerido como tema de Literacia Financeira a elaboração de um orçamento de uma viagem (visita de estudo, acampamento, etc.)

Para os alunos de Ciências Sócio Económicas será recomendável que sejam fomentadas as conexões com assuntos e conceitos da disciplina de Economia.

### **Bibliografia de referência**

Aspas, R. (2020). *Tipos de impostos: diretos e indiretos*. Obtido de <https://www.doutorfinancas.pt/financas-pessoais/impostos-em-portugal-diretos-e-indiretos/>

Batista, A. S. (2014). *Matemática financeira. O valor do dinheiro ao longo do tempo*. Porto: Vida Económica.

COMAP (2016). *For all Practical Purposes - Mathematical Literacy in Today's World*. New York: W. H. Freeman and Company.

Conselho Nacional de Supervisores Financeiros. (2016). *Plano Nacional de Formação Financeira 2016-2020*. Lisboa: Banco de Portugal.

Domingos, A., Santiago, A., & Teixeira, P. (2017). Materiais para a Aula de Matemática - Perfis financeiros, *Educação & Matemática*, nº 142, p. 13-14.

Gonçalves, D. (2019). *Quais os impostos cobrados na compra de uma casa?* Obtido de <https://www.doutorfinancas.pt/creditos/credito-habitacao/quais-os-impostos-cobrados-na-compra-de-uma-casa/>.

Junior, I. M. (2021). *Educação Financeira*. IMPA. Obtido de <https://umlivroaberto.org/producao/educacao-financeira/>.

Machado, H. A. (2011). *A literacia financeira da população escolar em Portugal. Estudo aplicado a alunos do ensino secundário da região de Lisboa*. (Dissertação de Mestrado). Universidade Técnica de Lisboa.

Ministério da Educação e Ciência (2013). *Referencial de Educação Financeira para a Educação Pré-Escolar, o Ensino Básico, o Ensino Secundário e a Educação e Formação de Adultos*, Obtido de: [https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/ficheiros/referencial\\_de\\_educacao\\_financeira\\_final\\_versao\\_port.pdf](https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/ficheiros/referencial_de_educacao_financeira_final_versao_port.pdf).

- Nascimento, N. H. A. (2015). *Matemática e educação financeira: um estudo de caso do Ensino Secundário*. (Dissertação de Mestrado). Universidade Nova de Lisboa. Obtido de <http://hdl.handle.net/10362/16356>.
- Pinto, D. V. & Domingos, A. (2015). A Educação Financeira para uma eficaz contenção do consumo. In *Atas do 2º Seminário de Investigação em Educação Financeira Escolar e Educação Matemática*, (pp. 121). Lisboa: Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia; Unidade de Investigação e Desenvolvimento.
- Pordata / RTP (2015). *O que é a dívida pública?* Obtido de <https://ensina.rtp.pt/artigo/o-que-e-a-divida-publica/>.
- Pordata / RTP (2015). *O que são impostos diretos e indiretos?* Obtido de <https://ensina.rtp.pt/artigo/o-que-sao-impostos-diretos-e-indiretos/>
- Ribeiro, E. M. C. (2013). *Literacia Financeira. Estudo aplicado aos alunos do 3.º Ciclo do Ensino Básico e Secundário*. (Dissertação de Mestrado). Universidade Portucalense Infante D. Henrique.
- Rodrigues, A. & Pimenta, C. (2017). Literacia financeira - construção do conhecimento matemático (uma experiência de ensino com alunos do 12º ano de escolaridade). *CIBEM 2017* (Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática) CB-219, p. 74-84. Madrid: Universidade Complutense.

Cofinanciado por:



UNIÃO EUROPEIA  
Fundo Social Europeu